

## Che cos'è un insieme

Nel linguaggio comune per indicare un raggruppamento di oggetti, di animali o di persone si usano termini come gruppo, squadra, gregge, stormo; nel linguaggio matematico si utilizza il termine insieme, più generico:

- un gruppo di ragazzi è un insieme di ragazzi;
- uno stormo di uccelli è un insieme di uccelli;
- un gregge di pecore è un insieme di pecore.

Gli oggetti, gli animali o le persone che costituiscono un insieme si dicono elementi dell'insieme. Un insieme è definito solo se i suoi elementi sono elencati in modo preciso oppure se si possono individuare con certezza, nel senso che si deve poter stabilire inequivocabilmente se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme.

Ad esempio costituiscono un insieme:

- gli alunni iscritti alla Scuola "P. Mattej" di Formia;
- le lettere della parola amico;

perché, in ogni caso, gli elementi dell'insieme sono elencati con precisione o individuabili senza possibilità di equivoci.

Non costituiscono invece un insieme:

- i libri più interessanti della biblioteca;
- le città più belle d'Europa;
- gli amici più simpatici di Carla;

perché non esiste alcun criterio oggettivo in base al quale si può stabilire se un libro è interessante oppure non lo è, se una città è più bella di un'altra, se una persona è simpatica o antipatica, e quindi gli elementi degli insiemi non sono individuabili in modo certo e inequivocabile.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto, ad esempio A, B, C, X, Y, ..., mentre gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minuscole, ad esempio a, b, c, x, y, ...

Alcune lettere particolari vengono usate per indicare gli insiemi numerici; ad esempio:

- l'insieme dei numeri naturali si indica con  $\mathbf{N}$ .

Per indicare che un elemento  $a$  appartiene all'insieme  $A$ , si scrive  $a \in A$ .

Un insieme si dice finito se ha un numero limitato di elementi, si dice infinito se ha un numero illimitato di elementi. Ad esempio:

- l'insieme dei giorni della settimana è costituito da 7 elementi e quindi è un insieme finito;
- l'insieme dei numeri pari è costituito da infiniti elementi e quindi è un insieme infinito.

Il numero degli elementi che costituiscono un insieme prende il nome di **potenza** dell'insieme. Ad esempio:  $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$  è un insieme di potenza 5 ;  $B = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$  è un insieme di potenza 7 .

Due insiemi si dicono **equipotenti** quando hanno la stessa potenza, cioè sono costituiti dallo stesso numero di elementi.

Ogni insieme costituito da un solo elemento si dice insieme **unitario**. Ad esempio: l'insieme delle consonanti della parola olio.

Ci sono insiemi costituiti da nessun elemento, cioè privi di elementi, che si dicono insiemi vuoti e si indicano con il simbolo  $\emptyset$ . Ad esempio:

- l'insieme dei triangoli con quattro lati;
- l'insieme dei cani che hanno cinque teste.

Due insiemi si dicono **uguali** se sono costituiti dagli stessi elementi. Ad esempio:

- l'insieme delle vocali della parola canestro,
- l'insieme delle vocali della parola gelato,

sono uguali, perché entrambi sono costituiti dagli elementi  $a, e, o$

## La rappresentazione degli insiemi

### Rappresentazione per elencazione

Consiste nell'elencare, uno a uno, tutti gli elementi che costituiscono l'insieme, scrivendoli fra due parentesi graffe, nell'ordine voluto, senza ripetizioni, in modo che ciascun elemento compaia una sola volta.

Ad esempio: l'insieme **A** delle lettere della parola *carattere*

$$A = \{c, a, r, t, e\}$$

### Rappresentazione per proprietà caratteristica

Consiste nell'indicare, quando esiste, la proprietà comune a tutti gli elementi dell'insieme, che li individua in modo inequivocabile e per questo si dice proprietà caratteristica.

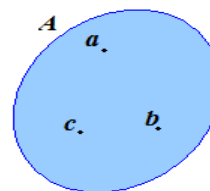
Ad esempio, per rappresentare l'insieme **A** delle consonanti della parola *cavallo*, si scrive:

$$A = \{x/x \text{ è una consonante della parola cavallo}\}$$

e si legge: "l'insieme A costituito da tutti gli elementi  $x$  tali che  $x$  è una consonante della parola cavallo".

### Rappresentazione grafica

Consiste nel rappresentare l'insieme con una linea chiusa, all'interno della quale ciascun elemento è indicato con un punto o con un simbolo: questo tipo di rappresentazione geometrica si chiama **diagramma di Venn**. Ecco un esempio:



Quando si deve rappresentare un insieme, si può scegliere, fra le tre rappresentazioni possibili, quella che si ritiene più opportuna e più utile. Occorre comunque tenere presenti le caratteristiche di ciascuna rappresentazione:

- la *rappresentazione per elencazione* è sempre la più chiara e precisa e non lascia dubbi, tuttavia è inutilizzabile se gli elementi sono molto numerosi;
- la *rappresentazione per proprietà caratteristica* è opportuna quando gli elementi sono molto numerosi o infiniti;
- il *diagramma di Venn* si utilizza soprattutto quando è utile visualizzare gli elementi, ma risulta poco pratico quando essi sono numerosi.

## I sottoinsiemi

Se consideriamo gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{2, 5, 6\}$$

possiamo notare che tutti gli elementi di **B** appartengono anche ad **A**: per questo motivo si dice che **B è un sottoinsieme di A**.

Un insieme **B** si dice **sottoinsieme** di un insieme **A** se tutti gli elementi di **B** appartengono anche ad **A**.

Se **B** è un sottoinsieme di **A**, si dice che **B è incluso in A** e si scrive

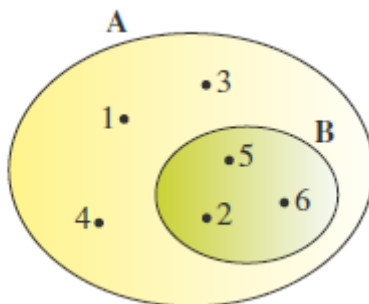
$$B \subset A.$$

La scrittura

$$B \subseteq A$$

significa che **B** è incluso in **A** e può anche essere uguale ad **A**.

La rappresentazione grafica dei due insiemi **A** e **B** mediante un unico diagramma di Venn:



Ogni insieme può essere considerato un sottoinsieme di se stesso e l'insieme vuoto può essere ritenuto un sottoinsieme di qualsiasi insieme: per questo motivo, dato un insieme **A**, l'insieme **A** stesso e l'insieme vuoto  $\emptyset$  si dicono **sottoinsiemi impropri** di **A**, mentre tutti gli altri sottoinsiemi di **A** si dicono **sottoinsiemi propri**.

## Alcune operazioni con gli insiemi

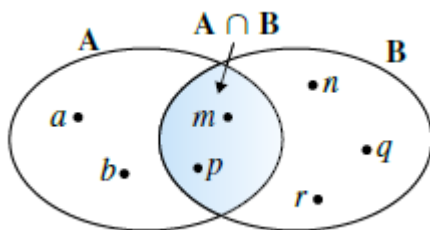
### Intersezione di insiemi

Si dice **insieme intersezione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme  $A \cap B$  costituito da tutti gli elementi che appartengono sia ad **A** sia a **B**.

$$A = \{a, b, m, p\}$$

$$B = \{m, n, p, q, r\}$$

$$A \cap B = \{m, p\}$$



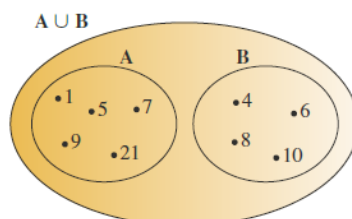
### Unione di insiemi

Si dice **insieme unione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme  $A \cup B$  costituito da tutti gli elementi che appartengono ad **A** e da tutti gli elementi che appartengono a **B**.

$$A = \{1, 5, 7, 9, 21\}$$

$$B = \{4, 6, 8, 10\}$$

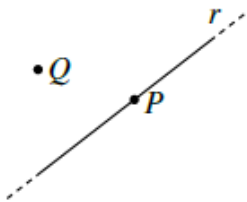
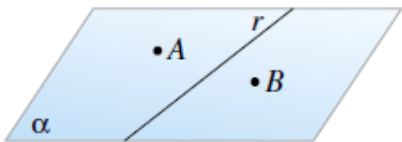
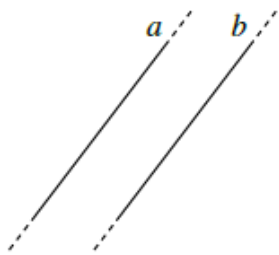
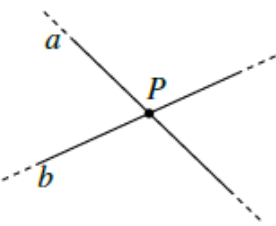
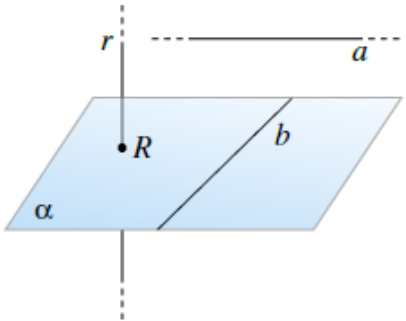
$$A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 21\}$$



## Il linguaggio degli insiemi

Simbolo	Significato	Simbolo	Significato
$\in$	appartenenza	$\not\subset$	non inclusione
$\notin$	non appartenenza	$\cup$	unione
$\subset$	inclusione stretta	$\cap$	intersezione
$\subseteq$	inclusione o uguaglianza	$\emptyset$	insieme vuoto

Nelle figure che seguono sono rappresentate alcune relazioni molto frequenti tra figure geometriche (punti, rette, piani) e la loro rappresentazione mediante il linguaggio degli insiemi.

 <p><math>P \in r</math> <math>Q \notin r</math></p>	 <p><math>A \in \alpha</math> <math>B \in \alpha</math> <math>r \in \alpha</math></p>
 <p><math>a \cap b = \emptyset</math></p> <p>le rette <math>a</math> e <math>b</math> sono parallele e quindi non hanno punti comuni</p>	 <p><math>a \cap b = P</math></p> <p>le rette <math>a</math> e <math>b</math> sono incidenti nel punto <math>P</math></p>
 <p><math>r \cap \alpha = R</math> la retta <math>r</math> è incidente in <math>R</math> al piano <math>\alpha</math>  <math>a \cap \alpha = \emptyset</math> la retta <math>a</math> è esterna al piano <math>\alpha</math>  <math>b \cap \alpha = b</math> la retta <math>b</math> giace sul piano <math>\alpha</math></p>	